ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию 9
Из предисловия ко второму изданию 10
Предисловие к третьему изданию 12

Глава I

Элементы теории множеств

§ 1. Понятие множества. Операции над множествами 13
1. Основные определения (13). 2. Операции над множествами (13).
§ 2. Отображения. Разбиения на классы 16
1. Отображение множеств. Общее понятие функции (16). 2. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности (18).
§ 3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества 21
1. Конечные и бесконечные множества (21). 2. Счетные множества (22). 3. Эквивалентность множеств (24). 4. Несчетность множества действительных чисел (26). 5. Теорема Кантора — Бернштейна (28). 6. Понятие мощности множества (28).
§ 4. Упорядоченные множества. Трансфинитные числа 31
1. Частично упорядоченные множества (31). 2. Отображения, сохраняющие порядок (32). 3. Порядковые типы. Упорядоченные множества (33). 4. Упорядоченная сумма упорядоченных множеств (34). 5. Вполне упорядоченные множества. Трансфинитные числа (34). 6. Сравнение порядковых чисел (36). 7. Аксиома выбора, теорема Цермело и другие эквивалентные им утверждения (38). 8. Трансфинитная индукция (40).
§ 5. Системы множеств 41
1. Кольцо множеств (41). 2. Полукольцо множеств (42). 3. Кольцо, порожденное полукольцом (44). 4. σ-алгебры (45). 5. Системы множеств и отображения (46).

Глава II

Метрические и топологические пространства

§ 1. Понятие метрического пространства 48
1. Определение и основные примеры (48). 2. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия (55).
§ 2. Сходимость. Открытые и замкнутые множества 56
1. Предельные точки. Замыкание (56). 2. Сходимость (58). 3. Плотные подмножества (59). 4. Открытые и замкнутые множества (60). 5. Открытые и замкнутые множества на прямой (62).
§ 3. Полные метрические пространства 66
1. Определение и примеры полных метрических пространств (66). 2. Теорема о вложенных шарах (69). 3. Теорема Бэра (70). 4. Пополнение пространства (71).

§ 4. Принцип сжимающих отображений и его применения 74
1. Принцип сжимающих отображений (74). 2. Простейшие применения принципа сжимающих отображений (75). 3. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений (78). 4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям (81).
§ 5. Топологические пространства 83
1. Определение и примеры топологических пространств (83). 2. Сравнение топологий (85). 3. Определяющие системы окрестностей. База. Аксиомы счетности (86). 4. Сходящиеся последовательности в T (90). 5. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм (91). 6. Аксиомы отделимости (94). 7. Различные способы задания топологии в пространстве. Метризуемость (97).
§ 6. Компактность 98
1. Понятие компактности (98). 2. Непрерывные отображения компактных пространств (101). 3. Непрерывные и полунепрерывные функции на компактных пространствах (101). 4. Счетная компактность (103). 5. Предкомпактные множества (105).
§ 7. Компактность в метрических пространствах 106
1. Полная ограниченность (106). 2. Компактность и полная ограниченность (107). 3. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах (109). 4. Теорема Арцела (109). 5. Теорема Пеано (111). 6. Равномерная непрерывность. Непрерывные отображения метрических компактов (113). 7. Обобщенная теорема Арцела (114).
§ 8. Непрерывные кривые в метрических пространствах 115

Глава III

Нормированные и топологические линейные пространства

§ 1. Линейные пространства 119
1. Определение и примеры линейных пространств (119). 2. Линейная зависимость (121). 3. Подпространства (122). 4. Фактор-пространства (123). 5. Линейные функционалы (124). 6. Геометрический смысл линейного функционала (126).
§ 2. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана — Банаха 128
1. Выпуклые множества и выпуклые тела (128). 2. Однородно-выпуклые функционалы (130). 3. Функционал Минковского (132). 4. Теорема Хана — Банаха (134). 5. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве (137).
§ 3. Нормированные пространства 138
1. Определение и примеры нормированных пространств (139). 2. Подпространства нормированного пространства (140). 3. Фактор-пространства нормированного пространства (141).
§ 4. Евклидовы пространства 143
1. Определение евклидовых пространств (143). 2. Примеры (145). 3. Существование ортогональных базисов, ортогонализация (147). 4. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы (149). 5. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса — Фишера (152). 6. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме (155). 7. Подпространства, ортогональные дополнения, прямая сумма (158). 8. Характеристическое свойство евклидовых пространств (161). 9. Комплексные евклидовы пространства (164).
§ 5. Топологические линейные пространства 167
1. Определение и примеры (167). 2. Локальная выпуклость (169). 3. Счетно-нормированные пространства (170).

Глава IV

Линейные функционалы и линейные операторы

§ 1. Непрерывные линейные функционалы 174
1. Непрерывные линейные функционалы в топологических линейных пространствах (174). 2. Линейные функционалы на нормированных пространствах (175). 3. Теорема Хана — Банаха в нормированном пространстве (179). 4. Линейные функционалы в счетно-нормированном пространстве (181).
§ 2. Сопряженное пространство 182
1. Определение сопряженного пространства (182). 2. Сильная топология в сопряженном пространстве (182). 3. Примеры сопряженных пространств (185). 4. Второе сопряженное пространство (190).
§ 3. Слабая топология и слабая сходимость 192
1. Слабая топология и слабая сходимость в линейном топологическом пространстве (192). 2. Слабая сходимость в нормированных пространствах (194). 3. Слабая топология и слабая сходимость в сопряженном пространстве (197). 4. Ограниченные множества в сопряженном пространстве (199).
§ 4. Обобщенные функции 203
1. Расширение понятия функции (203). 2. Пространство основных функций (204). 3. Обобщенные функции (205). 4. Действия над обобщенными функциями (207). 5. Достаточность запаса основных функций (210). 6. Восстановление функции по производной. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций (211). 7. Некоторые обобщения (214).
§ 5. Линейные операторы 218
1. Определение и примеры линейных операторов (218). 2. Непрерывность и ограниченность (222). 3. Сумма и произведение операторов (223). 4. Обратный оператор, обратимость (224). 5. Сопряженные операторы (230). 6. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы (232). 7. Спектр оператора. Резольвента (234).
§ 6. Компактные операторы 237
1. Определение и примеры компактных операторов (237). 2. Основные свойства компактных операторов (241). 3. Собственные значения компактного оператора (244). 4. Компактные операторы в гильбертовом пространстве (245). 5. Самосопряженные компактные операторы в H (246).

Глава V

Мера, измеримые функции, интеграл

§ 1. Мера плоских множеств 251
1. Мера элементарных множеств (251). 2. Лебегова мера плоских множеств (256). 3. Некоторые дополнения и обобщения (262).
§ 2. Общее понятие меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Аддитивность и σ-аддитивность 265
1. Определение меры (265). 2. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо (266). 3. σ-аддитивность (268).
§ 3. Лебегово продолжение меры 271
1. Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей (271). 2. Продолжение меры, заданной на полукольце без единицы (274). 3. Расширение понятия измеримости в случае σ-конечной меры (276). 4. Продолжение меры по Жордану (279). 5. Однозначность продолжения меры (280).

§ 4. Измеримые функции 282
1. Определение и основные свойства измеримых функций (282). 2. Действия над измеримыми функциями (283). 3. Эквивалентность (285). 4. Сходимость почти всюду (286). 5. Теорема Егорова (287). 6. Сходимость по мере (288). 7. Теорема Лузина. C-свойство (291).
§ 5. Интеграл Лебега 291
1. Простые функции (292). 2. Интеграл Лебега для простых функций (292). 3. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры (294). 4. σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега (298). 5. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (302). 6. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры (306). 7. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана (307).
§ 6. Прямые произведения систем множеств и мер. Теорема Фубини 310
1. Произведения систем множеств (310). 2. Произведения мер (312). 3. Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега (314). 4. Теорема Фубини (316).

Глава VI

Неопределенный интеграл Лебега. Теория дифференцирования

§ 1. Монотонные функции. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу 321
1. Основные свойства монотонных функций (321). 2. Дифференцируемость монотонной функции (324). 3. Производная интеграла по верхнему пределу (331).
§ 2. Функции с ограниченным изменением 332
§ 3. Производная неопределенного интеграла Лебега 337
§ 4. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции 339
§ 5. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона—Никодима 349
1. Заряды. Разложение Хана и разложение Жордана (349). 2. Основные типы зарядов (352). 3. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона — Никодима (353).
§ 6. Интеграл Стилтьеса 356
1. Меры Стилтьеса (356). 2. Интеграл Лебега — Стилтьеса (358). 3. Некоторые применения интеграла Лебега — Стилтьеса в теории вероятностей (360). 4. Интеграл Римана — Стилтьеса (362). 5. Предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса (366). 6. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространстве непрерывных функций (369).

Глава VII

Пространства суммируемых функций

§ 1. Пространство L_1 375
1. Определение и основные свойства пространства L_1 (375). 2. Всюду плотные множества в L_1 (377).
§ 2. Пространство L_2 380
1. Определение и основные свойства (380). 2. Случай бесконечной меры (384). 3. Всюду плотные множества в L_2. Теорема об изоморфизме (385). 4. Комплексное пространство L_2 (387). 5. Сходимость в среднем квадратичном и ее связь с другими типами сходимости функциональных последовательностей (387).

§ 3. Ортогональные системы функций в L_2. Ряды по ортогональным системам 389
1. Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье (390). 2. Тригонометрические системы на отрезке $[0, \pi]$ (393). 3. Ряд Фурье в комплексной форме (394). 4. Многочлены Лежандра (395). 5. Ортогональные системы в произведениях. Кратные ряды Фурье (397). 6. Многочлены, ортогональные относительно данного веса (399). 7. Ортогональный базис в пространствах $L_2(-\infty, \infty)$ и $L_2(0, \infty)$. (401). 8. Ортогональные многочлены с дискретным весом (402). 9. Системы Хаара и Радемахера — Уолша (404).

Глава VIII

Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

§ 1. Условия сходимости ряда Фурье 406
1. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке (406). 2. Условия равномерной сходимости ряда Фурье (412).
§ 2. Теорема Фейера 415
1. Теорема Фейера (415). 2. Полнота тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса (418). 3. Теорема Фейера для пространства L_1 (419).
§ 3. Интеграл Фурье 419
1. Основная теорема (419). 2. Интеграл Фурье в комплексной форме (422).
§ 4. Преобразование Фурье, свойства и применения 423
1. Преобразование Фурье и формула обращения (423). 2. Основные свойства преобразования Фурье (427). 3. Полнота функций Эрмита и Лагерра (431). 4. Преобразование Фурье быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций (431). 5. Преобразование Фурье и свертка функций (432). 6. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности (433). 7. Преобразование Фурье функций нескольких переменных (435).
§ 5. Преобразование Фурье в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ 438
1. Теорема Планшереля (438). 2. Функции Эрмита (442).
§ 6. Преобразование Лапласа 445
1. Определение и основные свойства преобразования Лапласа (445). 2. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений (операторный метод) (446).
§ 7. Преобразование Фурье — Стилтьеса 448
1. Определение преобразования Фурье — Стилтьеса (448). 2. Применения преобразования Фурье — Стилтьеса в теории вероятностей (450).
§ 8. Преобразование Фурье обобщенных функций 452

Глава IX

Линейные интегральные уравнения

§ 1. Основные определения. Некоторые задачи, приводящие к интегральным уравнениям 456
1. Типы интегральных уравнений (456). 2. Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям (457).
§ 2. Интегральные уравнения Фредгольма 460
1. Интегральный оператор Фредгольма (460). 2. Уравнения с симметрическим ядром (463). 3. Теоремы Фредгольма. Случай вырожденных ядер (465). 4. Теоремы Фредгольма для уравнений с произвольными ядрами (467). 5. Уравнения Вольтерра (472). 6. Интегральные уравнения первого рода (473).

§ 3. Интегральные уравнения, содержащие параметр. Метод Фредгольма 474
1. Спектр компактного оператора в H (474). 2. Отыскание решения в виде ряда по степеням λ. Детерминанты Фредгольма (475).

Глава X

Элементы дифференциального исчисления в линейных пространствах

§ 1. Дифференцирование в линейных пространствах 480
1. Сильный дифференциал (дифференциал Фреше) (480). 2. Слабый дифференциал (дифференциал Гато) (482). 3. Формула конечных приращений (482). 4. Связь между слабой и сильной дифференцируемостью (483). 5. Дифференцируемые функционалы (485). 6. Абстрактные функция (485). 7. Интеграл (485). 8. Производные высших порядков (488). 9. Дифференциалы высших порядков (491). 10. Формула Тейлора (491).
§ 2. Теорема о неявной функции и некоторые ее применения 492
1. Теорема о неявной функции (492). 2. Теорема о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных (495). 3. Касательные многообразия. Теорема Люстерника (496).
§ 3. Экстремальные задачи 499
1. Необходимое условие экстремума (500). 2. Второй дифференциал. Достаточные условия экстремума функционала (503). 3. Экстремальные задачи с ограничениями (506).
§ 4. Метод Ньютона 508

Дополнение

Банаховы алгебры

§ 1. Определение и примеры банаховых алгебр 513
1. Банаховы алгебры, изоморфизмы банаховых алгебр (513). 2. Примеры банаховых алгебр (514). 3. Максимальные идеалы (515).
§ 2. Спектр и резольвента 516
1. Определения и примеры (516). 2. Свойства спектра (517). 3. Теорема о спектральном радиусе (519).
§ 3. Некоторые вспомогательные результаты 520
1. Теорема о фактор-алгебре (520). 2. Три леммы (521).
§ 4. Основные теоремы 521
1. Линейные непрерывные мультипликативные функционалы и максимальные идеалы (521). 2. Топология во множестве $\mathcal{M}$. Основные теоремы (523). 3. Теорема Винера; упражнения (525).
Литература 529
Распределение литературы по главам 530
Предметный указатель 531